DEUXIÈME EPREUVE DE MATHEMATIQUES DUREE : 3 heures

NOMENCLATURE

Dans tout le problème, on désigne par :

- N^* l'ensemble des entiers strictement positifs
- I l'intervalle réel fermé $[0,1]$
- x, y deux variables indépendantes réelles de I
- $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de la variable x et de degré inférieur ou égal à n.
- n un élément de N^*.

PREMIERE PARTIE

1. - Montrer que les polynômes :

$$E_k = x^k(1-x)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n$$

forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n$.

2. - Soit F une fonction des variables réelles indépendantes x et y définie par les égalités :

$$(1) \qquad F(x,y) = (xy+1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k\, y^k\, (1-x)^{n-k} \quad \text{où}$$

$$(2) \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{avec par convention } 0! = 1$$

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

3. - Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée x et à coefficients réels. A tout polynôme P de $\mathcal{P}$, on associe le polynôme $B_n(P)$ défini par :

$$(3) \qquad B_n(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)\, C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k}$$

a) Calculer $B_n(P)$ pour $P \equiv 1$, $P \equiv x$ et $P \equiv x^2$

b) Démontrer que l'on a l'égalité :

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\, C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

et en déduire l'existence d'un réel a_n, ne dépendant que de n, tel que :

$$\left|x^2 - B_n(x^2)\right| \leqslant a_n \text{ pour tout } n \in N^* \text{ et tout } x \text{ de } I.$$

c) Montrer que B_n est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{P}$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n$.

DEUXIEME PARTIE

Soit E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle I.

Pour $f \in E$, on pose : $$(5) \qquad M = \sup_{x \in I} \left|f(x)\right|$$

On rappelle que tout élément f de E est uniformément continu sur I, c'est-à-dire que quelque soit ε réel strictement positif, il existe $\alpha(\varepsilon)$ réel strictement positif tel que pour tout couple $(x', x'') \in I \times I$ vérifiant :

$$(6) \qquad \left|x'-x''\right| < \alpha(\varepsilon) \text{ on ait :}$$

$$(7) \qquad \left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon$$

Tournez la page S. V. P.

A toute fonction f de E on fait correspondre le polynôme :

$$(8) \qquad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \; x^k \; (1-x)^{n-k}$$

On se propose de montrer que pour tout x de I :

$$(9) \qquad \lim_{n \to +\infty} B_n(f)(x) = f(x)$$

1°) - Démontrer que pour tout x de I et tout réel ε positif donné il existe un réel positif $\eta(\varepsilon)$ tel que :

$$(10) \qquad \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dès que : } \left| x - \frac{k}{n} \right| < \eta(\varepsilon)$$

Déduire des relations (3) et (10) que :

$$(11) \qquad \sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right| \geqslant \eta(\varepsilon)} C_n^k \; x^k \; (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\,\eta^2(\varepsilon)} \quad ,$$

la somme des premiers termes étant prise pour les valeurs de k extraites de 0, 1, 2, ..., n et telles que $\left|x-\frac{k}{n}\right| \geqslant \eta(\varepsilon)$.

2°) - On pose :

$$\beta(x) = \left| f(x) - B_n(f)(x) \right|$$

Montrer que pour tout x de I on a :

a) $$\beta(x) \leqslant \sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right| < \eta(\varepsilon)} C_n^k \; x^k \; (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right| \geqslant \eta(\varepsilon)} C_n^k \; x^k \; (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

b) $\beta(x) < \varepsilon$ dès que $n > \dfrac{M}{\varepsilon\,\eta^2(\varepsilon)}$

TROISIEME PARTIE

Application :

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Calculer $B_i(f)(x)$ pour i = 1,2 et 3

On tracera, dans un repère orthonormé la fonction f et les polynômes B_i (i = 1,2 et 3) pour x ∈ I

• • •